

10 класс

1. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 10, \\ y^3 + xy^2 = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Ответ. $x_1 = 1, y_1 = 1, x_2 = (-5+2\sqrt{5})\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, y_2 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, x_3 = (-5-2\sqrt{5})\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}, y_3 = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$

Решение. Умножим второе уравнение системы на 5, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 10, \\ 5y^3 + 5xy^2 = 10. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда, вычитая из первого уравнения системы (2) второе, имеем:

$$x^3 + 9x^2y - 5xy^2 - 5y^3 = 0 \quad (3).$$

Поскольку из второго уравнения системы (1) следует, что $y \neq 0$, поделим равенство (3) на y^3 :

$$\frac{x^3}{y^3} + 9\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} - 5 = 0.$$

Сделаем замену $t = \frac{x}{y}$, получим

$$t^3 + 9t^2 - 5t - 5 = 0,$$

$$(t-1)(t^2 + 10t + 5) = 0.$$

Откуда $t_1 = 1, t_2 = -5 + 2\sqrt{5}, t_3 = -5 - 2\sqrt{5}.$

Из того, что $t_1 = 1$ следует $x = y$, то есть $x^3 = 1$, значит $x_1 = 1, y_1 = 1.$

Из того, что $t_2 = -5 + 2\sqrt{5}$ следует $x = (-5 + 2\sqrt{5})y$, то есть $y^3 = 2 + \sqrt{5}$, значит $x_2 = (-5 + 2\sqrt{5})\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}, y_2 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}.$

Из того, что $t_3 = -5 - 2\sqrt{5}$ следует $x = (-5 - 2\sqrt{5})y$, то есть $y^3 = 2 - \sqrt{5}$, значит $x_3 = (-5 - 2\sqrt{5})\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}, y_3 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$